DM n° 9 { Sujet normal : parties I et II ; Sujet plus dur : tout }

À rendre mercredi 8 Janvier 2020

Problème : Autour des polynômes de Legendre

- On note $E_k = \mathcal{C}^k([-1,1], \mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On munit $E = E_0$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\| \ \|$. On a donc :

$$\forall f \in E,\ \|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\, \mathrm{d}x}.$$

On pourra utiliser, après vérification, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall f, g, h \in E,\ \langle f, gh \rangle &= \langle fg, h \rangle \\ \forall f, g \in E_1,\ \langle f', g \rangle &= f(1)\, g(1) - f(-1)\, g(-1) - \langle f, g' \rangle \end{aligned}$$

- On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n$ seront identifiés à des sous-espaces de E (on confond une fonction polynôme sur $[-1,1]$ et le polynôme formel associé).

- On note Φ l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathcal{P},\ \Phi(P) = \left[\left(X^2 - 1\right) P'\right]' = \left(X^2 - 1\right) P'' + 2XP'.$$

I. Définition des polynômes de Legendre

1. a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$, et montrer que le sous-espace $\mathcal{P}_n$ est stable par Φ.

► *On note Φ_n l'endomorphisme induit par la restriction de Φ à $\mathcal{P}_n$.*

b) Déterminer la matrice M_n de Φ_n dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

c) Montrer que Φ_n est diagonalisable. Quel est son spectre ?

2. a) Déterminer le spectre de Φ, et montrer qu'il s'écrit sous la forme $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, où $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers que l'on précisera.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'espace propre $E_{\lambda_n}(\Phi)$ est de dimension 1, et que si P_n est un générateur de cet espace, alors P_n est de degré n et vérifie la relation :

$$P_n(-X) = (-1)^n P_n(X).$$

3. Dans cette question et la suivante, on suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}$ obtenue en choisissant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un générateur P_n de $E_{\lambda_n}(\Phi)$.

a) Démontrer que : $\forall P, Q \in \mathcal{P},\ \langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$. En déduire que $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_n$. Que peut-on dire de Φ_n en tant qu'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathcal{P}_n$? Que représente la base $(P_0, \dots, P_n)$ par rapport à Φ_n ?

c) Soit $n \geqslant 1$ et $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$. Montrer que $\langle P_n, Q \rangle = 0$.

4. On suppose fixé $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\langle X P_n', P_n \rangle = P_n^2(1) - \frac{1}{2}\langle P_n, P_n \rangle$.

b) Que peut-on dire du degré de $X P_n' - n P_n$? En déduire la relation :

$$(2n+1)\langle P_n, P_n \rangle = 2P_n^2(1)$$

c) Montrer que l'on peut choisir P_n de façon unique si l'on impose la condition supplémentaire $P_n(1) = 1$.

▶ *Dans la suite, on désigne par L_n l'unique élément de $E_{\lambda_n}(\Phi)$ tel que $L_n(1) = 1$. Par définition, L_n est le* **polynôme de Legendre** *d'indice n. On gardera à l'esprit dans la suite du problème les propriétés suivantes vérifiées par L_n :*

- L_n est de degré n, vérifie $L_n(1) = 1$ et $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
- L_n est orthogonal à tout polynôme Q de degré inférieur à n
- L_n vérifie l'équation différentielle :

$$\left(X^2 - 1\right) L_n'' + 2X L_n' - n(n+1) L_n = 0. \qquad (1)$$

d) Calculer $\langle L_n, L_n \rangle$ et $\langle X L_n', L_n \rangle$.

II. Relations diverses

1. On fixe un entier $n \geqslant 1$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant n-2$ ou $k = n$. Montrer que $\langle X L_n, L_k \rangle = 0$.

b) En déduire qu'il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que :

$$X L_n = \alpha_n L_{n+1} + \beta_n L_{n-1}.$$

c) Montrer que $\alpha_n + \beta_n = 1$.

d) Montrer que $\langle L_n', L_{n-1} \rangle = 2$. En déduire les valeurs de α_n, β_n, et la relation de récurrence :

$$(n+1) L_{n+1} - (2n+1) X L_n + n L_{n-1} = 0. \qquad (2)$$

2. a) Calculer L_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

b) Calculer $L_n(0)$ pour tout entier n (si n est pair, on pourra l'exprimer à l'aide d'un coefficient binômial)

3. a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\langle X L_n', L_k \rangle = \left\langle L_{n-1}', L_k \right\rangle = 1 + (-1)^{n+k}$ pour tout entier $k \leqslant n-1$. En déduire la relation :

$$X L_n' - n L_n = L_{n-1}' \qquad (3)$$

b) Calculer $L_n'(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En utilisant *(2)*, établir la relation :

$$\forall n \geqslant 1,\ L_{n+1}' - L_{n-1}' = (2n+1) L_n \qquad (4)$$

puis la relation :

$$\forall n \geqslant 0,\ L_{n+1}' = X L_n' + (n+1) L_n \qquad (5)$$

d) En déduire la valeur de $L_n'(0)$ pour tout entier n.

III. Fonction génératrice des polynômes de Legendre

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par f_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ f_n(x) = [L_n(x)]^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}\,[L_n'(x)]^2$$

a) Montrer que f_n est croissante.

b) En déduire la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1]\,,\ |L_n(x)| \leqslant 1.$$

c) Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1]\,,\ |L_n'(x)| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. On pose :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times]-1,1[\,,\ h(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, t^n$$

a) Justifier la définition de h.

b) Soit $x \in [-1,1]$ fixé. Montrer que l'application $t \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Établir à l'aide de *(2)* la relation :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times]-1,1[\,,\ (1-2tx+t^2)\,\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) + (t-x)\,h(x,t) = 0$$

c) En déduire le calcul explicite de h, et la formule :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times]-1,1[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}. \qquad (6)$$

IV. Développement en série de Legendre

- Si $f \in E$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_n(f) = \langle L_n, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, L_n(x)\, \mathrm{d}x \quad , \quad a_n(f) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda_n(f)$$

et :

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\, L_k.$$

1. Soit f un élément de E.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace $\mathcal{P}_n$. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda_k^2(f) \leqslant \int_{-1}^{1} f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

b) Étudier la nature de la série de terme général $\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda_n^2(f)$. En déduire que

$$\lambda_n(f) = \mathrm{o}\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

c) Soit $g \in \mathcal{P}$. Montrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - \sigma_n(f)\| \leqslant \|f - g\|$ pour $n \geqslant n_0$. En déduire que $\|f - \sigma_n(f)\| \to 0$ quand $n \to +\infty$, puis que :

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda_n^2(f).$$

2. Soit f, g des éléments de E tels que $\lambda_n(f) = \lambda_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comparer f et g.

3. Soit $f \in E_1$. Montrer à l'aide de **II.3.c)** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{2}\left(\lambda_{n-1}(f') - \lambda_{n+1}(f')\right)$$

En déduire que $\lambda_n(f) = \mathrm{o}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ quand $n \to +\infty$.

4. On suppose à présent que $f \in E_2$.

a) Montrer que $a_n(f) = \mathrm{o}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ quand $n \to +\infty$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n(f)\,L_n(x)$ converge normalement sur $[-1,1]$.

▶ *On pose :*

$$\forall x \in [-1,1],\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\,L_n(x).$$

c) Montrer que $g \in E$ et que $\lambda_n(g) = \lambda_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire que :

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\,L_n(x).$$

★ ★ ★
★ ★
★