DD n°9 à rendre mercredi 22 décembre 2020

Préambule

On étudie des propriétés de la série de fonctions de la variable réelle dont le terme général est, k étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$u_k : x \mapsto \frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + (k+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Quand elle existe, on note la somme de cette série par :

$$U(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

L'origine historique de ce problème est au cœur de la troisième partie : la fonction U permet l'étude d'une fonction T associée à la définition de la spirale de Théodorus.

PARTIE I

Dans cette partie, on étudie des propriétés liées à la régularité de U, notamment son comportement aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que son intégrabilité.

1. Montrer que le domaine de définition de U est $]-1,+\infty[$. Dans toute la suite, on note I cet intervalle.

2. a) Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x)$ est définie et de classe C^1 sur $[-1,+\infty[$.

   b) En déduire alors :
   i. que U est de classe C^1 sur I,
   ii. qu'il existe deux réels λ et μ tels qu'au voisinage de -1, on ait :
   $$U(x) \sim \frac{\lambda}{(x+1)^{\mu}}$$

3. a) Montrer que U est intégrable sur l'intervalle $]-1,0]$.

   b) Pour $-1 < a < b$ et k entier naturel non nul, calculer $\int_{[a,b]} u_k$. On pourra poser $t = \sqrt{x+k}$ pour $x \in [a,b]$.

   c) Calculer $\int_{]-1,0]} U$.

4. On étudie U au voisinage de $+\infty$.

   a) Trouver $\lim\limits_{+\infty} U$.

   b) Pour $x \in I$ fixé, justifier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de l'application : $t \mapsto \frac{1}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$

   c) Trouver, à l'aide de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$, un développement au voisinage de $+\infty$ de la forme :
   $$U(x) = \frac{\delta}{x^{\nu}} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right)$$

   d) U est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

PARTIE II

Dans cette partie, on étudie plus particulièrement :

$$U(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

On pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

5. a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul :
   $$2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \le \rho_n \le 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
   Calculer alors $U(0)$ à 10^{-1} près, en justifiant le nombre de termes utilisés. Combien faut-il de termes pour calculer $U(0)$ à 10^{-3} près ?

   b) Donner aussi un équivalent simple de ρ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On étudie maintenant un procédé permettant d'obtenir plus rapidement une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-3} près.

6. a) Montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$, soit (B_n), avec $B_0 = 1$ et, pour tout $n \ge 1$: $\quad B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_{[0,1]} B_n = 0$

   b) *i.* On note $b_n = B_n(0)$. Montrer que, pour tout $n \ge 2$, $b_n = B_n(1)$.
   ii. Calculer $B_1, B_2\ B_3$.

   c) Soit $f \in C^3([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que :
   $$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = \int_{[0,1]} f + \int_0^1 B_1(x) f'(x)\,dx$$
   puis que :
   $$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = \int_{[0,1]} f + \sum_{i=2}^{3} (-1)^i \frac{b_i}{i!}\left[f^{(i-1)}(1) - f^{(i-1)}(0)\right] + \int_0^1 \frac{B_3(x)}{6} f^{(3)}(x)\,dx.$$

   d) Montrer qu'il existe une unique fonction $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 1, et telle que, pour tout $x \in [0,1[$, $P_n(x) = B_n(x)$. On exprimera, pour x réel quelconque, $P_n(x)$ en fonction notamment de x et de sa partie entière. Montrer que P_n est de classe C^∞ par morceaux et qu'elle est continue si et seulement si $n \ne 1$.

e) Soit $f \in C^3([0,+\infty[, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout entier naturel j, et pour tout entier naturel non nul m :

$$\sum_{k=j}^{m+j} f(k) = \frac{1}{2}[f(j)+f(m+j)] + \int_{[j,m+j]} f + \sum_{i=2}^{3}(-1)^i \frac{b_i}{i!}\left[f^{(i-1)}(m+j) - f^{(i-1)}(j)\right] + \int_j^{m+j} \frac{P_3(x)}{6} f^{(3)}(x)\,dx$$

7. a) Etudier les variations de B_3 sur $[0,1]$. En déduire que, pour tout x réel, $|P_3(x)| \le 6.10^{-2}$.

b) Soit $g:[1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$, qui est donc de classe C^3. Calculer $g'(x)$ pour $x \ge 1$.

On donne le résultat suivant, pour $x \ge 1$:

$$g''(x) = \frac{15x^2+10x+3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^3},$$

et on admet aussi que g'' est décroissante. En déduire l'intégrabilité de l'application :

$$[1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto P_3(x) g^{(3)}(x)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul j :

$$\rho_{j-1} = \int_{[j,+\infty[} g + \frac{1}{2}g(j) - \frac{1}{12}g'(j) + \frac{1}{6}\int_j^{+\infty} P_3(x) g^{(3)}(x)\,dx$$

d) En déduire une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-3} près.

PARTIE III

Dans cette partie, on étudie une fonction T de la variable réelle et à valeurs complexes, qui utilise U de manière fondamentale.

8. On définit la série de fonctions de la variable réelle, et à valeurs complexes, dont le terme général est, k étant un entier naturel non nul :

$$v_k : x \mapsto \frac{i}{2}\,\frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + i(k+x)}$$

a) Simplifier $v_k - \frac{i}{2}u_k$. En déduire que la série $\left(\sum_{k\ge1} v_k\right)$ converge lorsque $x \in I$. On définit alors l'application $V : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$. Montrer que $V(x) = \frac{i}{2}U(x) + \frac{1}{2(x+1)}$ pour tout $x \in I$.

b) Justifier la continuité de V sur I.

9. a) Montrer qu'il existe une unique fonction $T : I \to \mathbb{C}$, de classe C^1, telle que T ne s'annule pas sur I, et que :

$$\frac{T'}{T} = V \quad \text{et} \quad T(0) = 1$$

b) Montrer que, pour tout $x \in I$: $\quad T(x) = \sqrt{1+x}\; e^{\frac{i}{2}\int_0^x U(t)\,dt}$

c) Montrer que T se prolonge en une fonction continue sur $[-1,+\infty[$ par $T(-1) = 0$. Ce prolongement est-il dérivable en -1 ?

PARTIE IV

Dans cette partie, on écrit $U(x)$ sous la forme d'une intégrale.

11. a) Montrer que, pour $t > 0$ donné, l'application :

$$]0,t] \to \mathbb{R},\ u \mapsto \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

est intégrable, puis que l'application :

$$g :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du$$

est de classe C^1. Donner $g'(t)$ pour $t > 0$.

b) Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'application :

$$h_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-\alpha t} g(t)$$

est intégrable et montrer, en utilisant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, que :

$$\int_{]0,+\infty[} h_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul k et tout $x \in I$, une expression intégrale de $u_k(x)$.

d) Soit les applications :

$$\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$$

$$F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto e^{-t}\int_0^{\sqrt{t}} e^{v^2}\,dv$$

Déduire de ce qui précède que, pour tout $x \in I$, l'application :

$$]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{\varphi(t)F(t)}{t} e^{-xt}$$

est intégrable, et que :

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)F(t)}{t} e^{-xt}\,dt$$

12. a) Montrer que U est de classe C^∞ sur I, et exprimer sous forme intégrale les dérivées successives de U.

b) Montrer que U est convexe sur I, et tracer sommairement le graphe de U.

Fin de l'énoncé