DS n°1

Mercredi 11 septembre 2019 (durée 4 heures)

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Rappel : Un résultat non justifié, même exact, ne rapporte aucun point.

EXERCICE

Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotent (attention, les entiers caractérisant la nilpotence n'ont aucune raison d'être les mêmes pour x et y)

1. Montrer que xy est nilpotent.
2. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que $1_A - x$ est inversible.
4. Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit $u, v \in A$ tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
   Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D'.
4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE Il :

Dans la suite. on s'intéressera à l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes
$P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$
et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{X^3}{3^2} - \dfrac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$

1. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
2. Justifier : $\forall t \in [0,1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$

3. En déduire : $\forall x \in [0,1]\,, \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,, \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

4. Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,, \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
5. Comparer pour tout $x \in]0,1]$: $Q'_n(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$
6. En notant ,g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :
$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$
7. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable $]0,+\infty[$
2. Calculer , $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.

SECOND PROBLEME :

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$
Dans la suite de l'énoncé on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.
On notera en particulier :
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout, entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Préciser les valeurs de $u\left(\vec{i}\right)$ et $u\left(\vec{j}\right)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.

   En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

   En déduire que E_2 n'est pas un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2

8. En déduire que E_2 est la, réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.

9. E_2 est-il stable par la multiplication de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}' = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right) = \vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right) = \vec{j}$ ainsi que $S = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée, donc qui vérifient la relation (1), est noté E_3.

1. Représenter la matrice S
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
3. Montrer que pour tous réels a, b et c la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque,, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Calculer $u\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4}\right)$ Que remarque-t-on

4. Calculer $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu

5. On note $\mathcal{C}=\left(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4}\right)$ et on admet sans démonstration que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

   Déduire de la question précédente $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u)$

   En déduire l'existence d'une matrice $P\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B=P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.

   On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.

6. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad B^n=P\Delta^nP^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2.