DS 2

mercredi 4 octobre 2017 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

EXERCICE

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

(a) Déterminer le déterminant de A et en déduire le rang de A (on discutera selon a).
(b) Dans cette question on pose $a = -2$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
(c) **Dans cette question et les suivantes on pose $\mathbf{a = 1}$.**
La matrice A est-elle diagonalisable ? (si oui, on ne demande pas de la diagonaliser).
(d) Quel est le polynôme minimal de A ?
(e) Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $A^n = a_nA + b_nI$. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

PROBLÈME

Préliminaires (définitions et rappels).

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul. on note $u^p = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{p\,fois}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$; on notera $P(u)$ l'application linéaire définie par :

$$\forall q \in \mathbb{N}, P(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k u^k \text{ si } P(X) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k X^k.$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de u* l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

  $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (on ne demande pas de le prouver).
- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- On notera $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les termes sont nuls sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1. On rappelle que l'ensemble des matrices $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ constitue une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie 0. Un exemple.

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs 1, 2, ... n. Ainsi, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M.

1. Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

Dans toute la suite du problème, u désigne un endomorphisme de E.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé :

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id) = \ker(\lambda id - u).$$

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres distinctes 2 à 2. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite adaptée à la somme directe $E = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = \left(e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p\right)$ (attention : e_k^i ne désigne pas une puissance de vecteur, c'est juste une notation pour désigner le $k$ième vecteur de la base $\mathcal{B}_i$).

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.
   En déduire que la restriction de u à $E_{\lambda_i}(u)$ est un endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$. Cet endomorphisme sera noté u_i.
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, que peut-on dire de u_i ? Quelle est la matrice de u_i dans la base $(e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ la matrice de v, notée $Mat(v, \mathcal{B})$ est de la forme :

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & V_p \end{pmatrix}$$

   avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

7. Dans cette question seulement on pose u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que u est diagonalisbale et déterminer la dimension de son commutant.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geqslant 2$. On note r le rang de u. On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

2. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E muni de la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_r)$,

   (a) Notons $\tilde{u}$ la restriction de u à F. Montrer que $\tilde{u}$ est un isomorphisme de G sur son image à préciser.

   (b) Montrer que la famille $(u(e'_1), u(e'_2), \ldots, u(e'_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u \oplus H$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$Mat(u, \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underset{r}{\leftrightarrow} & \underset{s}{\leftrightarrow} & \underset{r}{\leftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$

   I_r désigne la matrice identité d'ordre r.

4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; la matrice de v dans la base $\mathcal{B}'$ est définie par blocs en posant :

$$Mat(v, \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underset{r}{\leftrightarrow} & \underset{s}{\leftrightarrow} & \underset{r}{\leftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$

   Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases} \qquad 0_{p,q} \text{ désignant la matrice nulle à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes.}$$

5. En déduire que $\dim(\mathcal{C}(u)) = n^2 + 2r^2 - 2rn$. Montrer que : $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

6. Dans cette question seulement on pose u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(u)$?

   (b) Que conclure sur l'inégalité de la question précédente ?

Partie III. Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

$$(u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0. \tag{1}$$

Id désigne l'application identique de E. On rappelle que :

$$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id).$$

On pose $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$; on suppose de plus $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

1. (a) Énoncer le théorème de décomposition des noyaux.

   (b) Montrer que : $E = E_1 \oplus E_2$.

(c) Justifier que les espaces E_1 et E_2 sont stables par u.

Dans la suite on note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}.$$

(Pour ceux qui n'y arrivent pas et pour ne pas les empêcher de faire la suite, on doit trouver $F(X) = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{1}{(X-2)^2}$. Mais vous n'êtes pas autorisés à partir de ce résultat pour obtenir la décomposition en éléments simples ...)

En déduire deux polynômes U et V tels que :

$$1 = U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2, \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

3. Soit $x \in E$ et posons $x_1 = [V(u) \circ (u - 2Id)^2](x)$ et $x_2 = [U(u) \circ (u - Id)](x)$. Montrer que $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. En déduire que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.

4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable (on pourra travailler dans une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.)

5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2, en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\dim \mathcal{C}(u)$.

   (a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.

   (b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$Mat(w, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$

   où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2.

   (c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\ker(u - 2Id))$.

   (d) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$

   et

$$V_2 N = N V_2.$$

   (e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.

   (f) On suppose u non diagonalisable. Déterminer $\dim \mathcal{C}(U)$ en fonction de n_1, n_2 et $\dim(\ker(u - 2Id))$.