DS n°3

mercredi 16 octobre 2019 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Un résultat, même juste, non justifié ne rapporte aucun point.

Exercice 1 : Normes équivalentes

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt.$$

1. Démontrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
De même, $\| \ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.

2. (a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
(b) Démontrer que les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes sur E.

3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\| \ \|$? (*on pourra introduire la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *:* $f_n x \to x^n$ *en choisissant des normes appropriées*)

Exercice II

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.
1. Soit p un projecteur de E.
(a) Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.
(b) En déduire que la trace de p (notée $tr(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}\ (p)$).
(c) Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\ (u)$ est il nécessairement un projecteur de E?

2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.
(a) Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme:

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont n nombres réels.
(b) Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.
(c) On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\ (u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.
(c) Soit la matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Exercice III. Un équivalent

1.Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application décroissante. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
Un théorème de cours dit que la série $\sum f(k)$ converge, on ne vous demande pas de le redémontrer.
Démontrer alors que $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)dx.$

2. Soit $\alpha > 1$. **Démontrer** que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Problème : autour de la série harmonique

Dans tout le problème on notera H_n la somme partielle de la série harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie A

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = H_n - \ln(n)$

1. Montrer que la suite u est strictement décroissante et positive, et qu'elle converge vers une limite γ. Ce nombre γ est appelé la constante d'Euler.

2. Montrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{2n}$ est strictement croissante.

3. En déduire l'encadrement : $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \gamma + r_n$.

(a) Justifier l'encadrement suivant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < r_n < \frac{1}{2n}$.

(b) Combien de termes $\frac{1}{k}$ faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-10} en utilisant la suite u ?

Partie B : indépendante de la partie précédente

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \geqslant 1, \\ \text{la suite } (a_n) \text{ est bornée,} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0, \\ \text{la série } \sum(a_n) \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

On note alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$ ğ

1. Sans utiliser le résultat de la partie A mais en utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, prouver que : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. (a) De façon analogue, en introduisant $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ et $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$, montrer que $T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

   (c) Retrouver le résultat de 2.b. directement.

3. Un exemple. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

   (a) Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

   (b) Prouver que $\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$

   (c) Déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

5. Soit c_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (d_n) à termes positifs tels que $d_n = o(c_n)$ et $\sum(d_n)$ diverge.