DS n°4

mercredi 20 novembre 2019 (durée 4 heures)

Sujet normal

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 : cours

1. Rappeler la définition (à l'aide de suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Soit E et F deux evn, et f une application continue de E dans F.
   Soit A une partie compacte de E. Démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F (On demande la démonstration de ce résultat de cours).
   L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

Exercice 2

Soit E un evn et C un convexe de E.
Montrer que $\overline{C}$ (l'adhérence de C) est un convexe de E.

Exercice 3

On s'intéresse ici aux fonctions f continues en tout point où elles sont définies et vérifiant la relation

$$\forall (x,y), \quad f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

1. (a) Montrer que si f est définie en 0 alors f est la fonction nulle.
   A partir de maintenant on suppose que f n'est pas la fonction nulle, ce qui revient à dire que f n'est pas définie en 0, et on suppose alors que (1) est vraie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$.
   (b) Déterminer $f(1)$ et $f(-1)$.
   (c) Étudier la parité de f. On ne s'intéressera alors qu'aux valeurs de $f(x)$ pour $x > 0$.
   (d) Pour $x > 0$, exprimer $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$
2. Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) = 1$.
3. Déterminer $f(x)$ pour $x = a^r$ avec $r \in \mathbb{N}$ puis $r \in \mathbb{Z}$ et enfin $r \in \mathbb{Q}$.
4. (a) Determiner le réel u tel que $x = a^u$.
   (b) Á l'aide d'une suite de rationnels convergeant vers u, déterminer $f(x)$ pour $x > 0$.
5. Conclure (penser à la réciproque).

Exercice 4

Soit K une partie compacte de l'espace vectoriel normé E de dimension finie et soit f une application de K dans K telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2, \; x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. (a) Montrer que $x \to \|x - f(x)\|$ est continue sur K.
   (b) Démontrer qu'il existe un c dans K tel que $\|c - f(c)\| = \inf\{\|x - f(x)\| \;/\; x \in K\}$.
   (c) Montrer que c vérifie $f(c) = c$ (on pourra considérer $\|b - f(b)\|$ avec $b = f(c)$).
   Montrer que c est l'unique élément x de K tel que $f(x) = x$ (un tel élément x est appelé point fixe de f).

2. Pour $a \in K$ on construit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$$

le but de la question est de montrer que cette suite converge vers c.

   (a) Posons $u_n = \|c - a_n\|$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = c$, conclure.
   (b) Sinon, étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle converge vers un réel noté ℓ.
   (c) En supposant $\ell > 0$, et en utilisant le fait que la suite (a_n) est une suite d'un compact, aboutir à une absurdité.
   (d) Conclure