DS n°4 Plus dur

mercredi 20 novembre 2019 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété (P) si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. (a) Quelles sont les fonctions constantes qui vérifient (P) ?
   (b) Soit f une fonction vérifiant (P). Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.

   Dorénavant On suppose ici que f vérifie (P) et n'est pas la fonction nulle.
2. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(na)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on ne demande pas l'expression de $f(na)$ en fonction de $f(a)$).
4. Soit $a > 0$. Dans cette question on suppose que $\forall x \in [0;a],\ f(x) > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}$.
5. Soit $a > 0$ et $x \geqslant 0$. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N},\ I_q = \{p \in \mathbb{N}/\ p.\dfrac{a}{2^q} \leqslant x\}$ possède un plus grand élément qui sera noté p_q.
   On pose alors, pour tout entier q, $u_q = p_q.\dfrac{a}{2^q}$. Montrer que la suite $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
6. On suppose maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
   $\forall x \in [0;a],\ f(x) > 0$.
   (b) Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(x)$ pour tout x réel.
   (c) On suppose que $f(a) = 1$. Déterminer f.
   (d) On suppose que $f(a) < 1$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\alpha x)$.

Problème : points fixes d'une application contractante

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si A est une partie de E on note $\overline{A}$ son adhérence, $\overset{o}{A}$ son intérieur, $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$ sa frontière, et on note $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} \|x - y\|$ sa distance à un point $x \in E$. On note respectivement $B(x, r) = \{y \in E; \|y - x\| < r\}$ et $\overline{B}(x, r) = \{y \in E; \|y - x\| \leqslant r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r.
Etant données deux parties A et B de E, et une application $f : A \to B$, on rappelle que $x \in E$ est un *point fixe* de f si c'est une solution de l'équation $x = f(x)$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$, c'est à dire s'il existe un réel positif $k < 1$ tel que pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$.
Dorénavant et **dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide de E.**

A. Théorème du point fixe

Dans cette partie on établit le **Théorème de Picard.** *Toute application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*
Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1. Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ci est unique.

Soit $x_0 \in A$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n, p \in \mathbb{N},\ \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant Ak^n$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle converge. Montrer que sa limite est dans A
4. Conclure.

B. Invariance par homotopie

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont *homotopes*, c'est à dire qu'il existe une application $h : A \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$ on a $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$, et qui vérifie en outre les propriétés suivantes :

$\boxed{a}$ il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in A$ et tout $t \in [0,1]$ on a : $\|h(x,t) - h(y,t)\| \leqslant k\|x-y\|$

$\boxed{b}$ il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tous $t, u \in [0,1]$, $\|h(x,t) - h(x,u)\| \leqslant k'\,|t-u|$

$\boxed{c}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial A$, on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose $T = \{t \in [0,1]; \exists x \in A, x = h(x,t)\}$.

5. Vérifier que T est non vide

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers un réel $t \in [0,1]$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

6. Vérifier qu'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tous entiers naturels n et m, on a :
   $\|x_n - x_m\| \leqslant \dfrac{k'}{1-k}\,|t_n - t_m|$.

7. On admettra que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A.
   Montrer que h est continue sur $A \times [0,1]$. En déduire que T est fermé.

Soit encore $t \in T$ et $x \in A$ tels que $x = h(x,t)$.

8. Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$.

Soit r et ε deux nombres réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant \dfrac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x, \partial A)$, et soit $u \in [0,1]$ tel que $|t-u| < \varepsilon$.

9. Montrer que pour tout $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$ on a $\|x - h(y,u)\| \leqslant r$.

10. En déduire, en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'aplication $y \to h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

11. en déduire que T est un ouvert relatif à $[0,1]$. Conclure alors que g possède un unique point fixe intérieur à A (on pourra considérer une borne supérieure de T).

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ admet un point fixe (on remarque qu'ici l'espace d'arrivée n'est pas forcément A), mais on fait les trois hypothèses suivantes :

$\boxed{d}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A.

$\boxed{e}$ l'image $f(A)$ de A par f est bornée.

$\boxed{f}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq tf(x)$.

12. Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. une généralisation

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que

$\boxed{g}$ le vecteur nul est intérieur à A;

$\boxed{h}$ l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact;

$\boxed{i}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq tf(x)$.

On pose $X = \{x \in A; \exists t \in [0,1], x = tf(x)\}$.

13. Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0,1]$ définie par la formule
    $\mu(x) = \dfrac{d(x,\partial A)}{d(x,\partial A) + d(x,X)}$ est bien définie et continue. Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par : $g(x) = \begin{cases} \mu(x)f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C\backslash A \end{cases}$

14. Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le **Théorème (Schauder)**. Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.

15. Conclure à l'aide du théorème de Schauder que f admet un point fixe intérieur à A.