

DS n°5

mercredi 18 décembre 2019 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Un résultat, même juste, non justifié ne rapporte aucun point.

Exercice 1

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\langle A, B \rangle = \text{trace}({}^t A B)$

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $\langle A, A' \rangle$?
2. On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Donner alors pour ce produit scalaire, une base orthonormée de $\mathcal{F}$ et de son orthogonal $\mathcal{F}^\perp$.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{F}$ ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{F}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par : $f : t \rightarrow \begin{cases} \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n+1}$. On notera $S(t)$ sa somme sur son intervalle ouvert de convergence.
(b) Démontrer l'égalité $f(t) + S(t) = 0$ pour tout nombre réel t dans l'intervalle $] -1, 1[$.
(c) Justifiez que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.
(d) Déterminer le signe de $f(t)$ selon la valeur de t dans l'intervalle $] -\infty, 1[$.
2. Soit L la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par $L : x \rightarrow \int_x^0 f(t) dt$.
(a) Justifier que la fonction L est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $] -\infty, 1[$.
On admet que la fonction L admet un prolongement par continuité à gauche au point 1 (on pourra le prouver en janvier)
(b) Justifier que la fonction L est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.
(c) Démontrer que la fonction L admet un développement en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$; on énoncera explicitement le théorème utilisé. Expliciter les coefficients de ce développement.
(d) Soit x dans l'intervalle $] -1, 1[$. Démontrer la relation : $L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}$.
Cette relation est-elle vérifiée pour $x = 1$?
(e) Justifier l'égalité : $L(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Problème : Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

- (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .
(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .
- On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
- On pose pour $x \in [0; 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0; 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0; 1]$.
- Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$.

- Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
- (a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.
(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.
- (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.
(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra observer que pour $k \geq n + 1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
- Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .