DS n°5 Plus dur

mercredi 18 décembre 2020 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Un résultat non justifié, même juste, ne rapporte aucun point.

Problème 1 : Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

   (b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2} \right)$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
   On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. (a) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

   (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

   (a) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

   (b) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

   (c) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Problème 2

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$.
Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

I. Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x,A)$ défini par :

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$$

1. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

2. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ alors $d(x,A) = \lim_{n\to\infty} d(x,A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \{y; \|y-x\| \leq \|x\|\}$.

3. Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x,V) = d(x, B\cap V)$ pour tout $x \in E$.

4. En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x,V) = \|x-y\|$.

II. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $<\ ,\ >$ sur E : $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$.

5. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x,V) = \|x-y\|$.

Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} <x_1,x_1> & <x_1,x_2> & \cdots & <x_1,x_n> \\ <x_2,x_1> & <x_2,x_2> & \cdots & <x_2,x_n> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_n,x_1> & <x_n,x_2> & \cdots & <x_n,x_n> \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que l'application $\varphi : Vect(x_1,,x_n) \to \mathbb{R}^n$ définie par $V(x = (<x,x_1>, <x,x_2>, ..., <x,x_n>)$ est injective.
   En déduire que $G(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est liée.

7. On suppose que la famille $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x,V)^2 = \frac{G(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)}{G(x_1,x_2,\ldots,x_n)}.$$

III. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in C([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

8. Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]); f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

9. Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.
10. En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.
11. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.
12. Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.
13. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.