DS n°6 : mercredi 15 janvier 2020 (durée 4 heures)

Sujet PLUS DUR

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle\,|\,\rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|.\|$. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u\circ u\circ\ldots\circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = Id_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$?

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est convexe si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, \ldots., a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dont la somme égale 1, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $Conv(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ et on admet que $Conv(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathscr{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réelles ayant n lignes et m colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$On notera en particulier $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A à coefficient réels est notée A^T. La trace de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $Tr(A)$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1) Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2) En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4) Soit K un sous-ensemble compact de E et $Conv(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application ϕ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $Conv(K) = \phi(\mathscr{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $Conv(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5) On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x|y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.
Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)
En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6) On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A|B\rangle = Tr(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)
Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

C. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un reel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

7) Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.
Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8) Montrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, ..., x_p$ éléments de E tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)
On considère une famille $(\Omega_i)_{\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ..., \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

10) Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ..., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup_{u\in G} \| u(x)\|$.

11) Montrer que N_G est bien définie, et que c'est une norme sur E.

12) Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :
• pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
• pour tous x, y dans E avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Pour la deuxième propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\| u(z)\|$ est continue.
On considère un élément u de $\mathscr{L}(E)$ et on suppose que K est stable par u, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle diamètre de K le nombre réel $\delta(K) = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\| u(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.
On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit r un entier > 1, $u_1, u_2, ..., u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14) Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15) Montrer que $N_G\left(\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, on a $N_G(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a))$.

16) En déduire, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17) Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1,\dots,r\}$.

18) En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = Tr(A^T B)$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \ / \ A \in G\}$, $\quad \Delta = \{A^T A \ / \ A \in G\}$ et $K = Conv(\Delta)$.

19) Montrer que $\rho_A \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

20) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est un sous ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21) Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N \ ; B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par la symétrie orthogonale par rapport a P.

22) Montrer que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Fin du problème