DS n°6

mercredi 15 janvier 2020 (durée 4 heures)

Sujet normal

Les calculatrices sont interdites

EXERCICE 1

Existence et calcul des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$

2. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

3. $\int_1^2 \ln(x^2-1) dx$

EXERCICE 2

.1.

.1.a Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

.1.b Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} .

.1.c En déduire la valeur de I_n pour tout n .

.2. On pose ici $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P et Q dans E , on note $\langle P, Q \rangle$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \rightarrow \langle P, Q \rangle \end{cases}$ est un produit scalaire.

.3. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$. Démontrer que $f \in S(E)$ (on pourra s'intéresser à la dérivée de $t \rightarrow tP'(t)e^{-t}$).

.4. Montrer que f est diagonalisable en base orthonormée, et donner dans cette base orthonormée la matrice de f (on pourra commencer par chercher l'image de la base canonique par f).

PROBLÈME

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note tM sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle | \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée. on note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x)|y \rangle = \langle x|s(y) \rangle$.

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si : $\forall x \in E, \langle s(x)|x \rangle \geq 0$ (respectivement $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle s(x)|x \rangle > 0$).

Une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp. symétrique définie positive) si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$ (respectivement $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$).

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{inégalité arithmético-géométrique}).$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \text{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.)

Questions préliminaires

.5.

.5.a Enoncer(sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E (aussi appelé théorème spectral) et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

.5.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

.6. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associée à la valeur propre α_i . Pour tout vecteur $x \in E$, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle.$$

.6.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β .

.6.b En déduire l'inclusion : $R_s(S(0, 1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0, 1)$ désigne la sphère unité de E .

.7.

.7.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

.7.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

.8. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

.9. En considérant les colonnes de A justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

.10. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

.11. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \text{Tr}(AS)$.

.11.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

.11.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t .

.11.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \text{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t .

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

.12. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(S) \right)^n \quad (*).$$

.13. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^t D S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\text{Tr}(S_\alpha)$.

.14. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant (*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

.15. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard})$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = \Omega \Delta {}^t \Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

.16. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t \Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$$

.17. Démontrer que $\{\text{Tr}(AS)/A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta)/B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m .

.18. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$: $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} (b_{1,1} \dots b_{n,n})^{\frac{1}{n}}$.

.19. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{\frac{1}{n}}$.

.20. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{\frac{1}{n}}$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m .