DS n°7

Concours blanc février 2020 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Un résultat non justifié, même juste, ne rapporte aucun point.

Sujet NORMAL

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie à l'autre.

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?
2. Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :
$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$
6. Justifier que $M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

7. Justifier que les intégrales $I(a,b)$ et $J(a,b)$ convergent, puis que $J(a,b) = 2I(a,b)$.
8. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$, montrer que
$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)$$
9. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)$$
10. Justifier que
$$I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)$$
On énoncera précisément le théorème utilisé.
11. Conclure que
$$M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}$$

Partie III

12. On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que
$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$
13. Montrer que $I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ est négligeable devant $2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ quand x tend vers 0^+.
14. Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.
15. Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que
$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$
16. Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que
$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$
17. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
18. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?
19. Que dire de la branche infinie de la courbe f en $+\infty$.
20. Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0, +\infty[$.

Partie IV

21. Soit $x > 0$, montrer que
$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$
22. On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \frac{2w_n}{1+w_n}$.
    (a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

(c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Partie V

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\, dt$$

23. Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.
24. En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}$$

25. Montrer que si $x \in]0,1]$, on a

$$I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

26. On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\, dt$$

(a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

On pourra considérer la quantité $W_n - W_{n+1}$.

(b) Démontrer que

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

27. Rappeler la valeur du rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, puis justifier l'expression du terme général de la suite de ses coefficients (α_n).
28. Démontrer que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$$

29. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}$$

30. En déduire une série numérique permettant d'obtenir la valeur de $M(3,5)$.