DS n°7

Concours blanc février 2020 (durée 4 heures)

Calculatrices autorisées

Sujet PLUS DUR

Autour de la transformation de Radon

L'objectif de ce problème est l'étude d'un certain opérateur intégral agissant sur les fonctions du plan, appelé *transformation de Radon*. On se propose d'établir une formule d'inversion et d'interpréter la transformation en termes de fonctions invariantes sur un groupe de matrices.

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et son élément neutre, I_3 .

Les éléments du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ seront notés en colonne, pour tout réel θ on notera $\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$.

Le plan est muni de sa structure euclidienne canonique, donnée par le produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

L'ensemble des matrices des rotations vectorielles planes est appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(2)$, son élément neutre, I_2. On écrira $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

I Préliminaires géométriques

Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $M(A,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & b_1 \\ & & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ où A est un élément du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2)$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

I.A - Isométries affines directes du plan euclidien

I.A.1) Déterminer un couple $(A,\vec{b})$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$ tel que l'on ait $M(A,\vec{b}) = I_3$.

I.A.2) Soit $(A,\vec{b})$ et $(A',\vec{b}')$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$. Montrer que $M(A,\vec{b})M(A',\vec{b}') = M(AA', A\vec{b}' + \vec{b})$

I.A.3) Montrer que les éléments de G sont inversibles et expliciter l'inverse de $M(A,\vec{b})$.

I.A.4) Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

I.A.5) L'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{R}^2\\ M(A,\vec{b}) & \mapsto & \vec{b}\end{array}\right.$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

I.B - Droites affines du plan

Pour $q\in\mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, on note $\Delta(q,\vec{u})$ la droite affine du plan passant par le point (qu_1, qu_2) et orthogonale à $\vec{u}$.

I.B.1) Représenter graphiquement $\Delta(\vec{0},\vec{e}_1)$ et $\Delta\left(2, \dfrac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)$.

I.B.2) Déterminer une équation cartésienne de $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$.

I.B.3) Montrer qu'une paramétrisation de $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ est donnée par $\begin{cases} x(t) = q\cos\theta - t\sin\theta \\ y(t) = q\sin\theta + t\cos\theta \end{cases}$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

I.B.4) À quelle condition les droites $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ sont-elles confondues ?

I.C - Action de G sur les droites

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites affines du plan et soit l'application $\Psi : \begin{cases} G & \to & \mathcal{D} \\ M(A, \vec{b}) & \mapsto & \Delta(\langle A\vec{e}_1, \vec{b}\rangle, A\vec{e}_1) \end{cases}$.

I.C.1) Représenter $\Psi\left(M(A, \vec{b})\right)$ dans le cas $A = R_{\pi/6}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

I.C.2) Déterminer $\Psi\left(M(I_2, \vec{0})\right)$.

I.C.3) Vérifier que $\Psi(M(R_\theta, q\vec{u}_\theta)) = \Delta(q, \vec{u}_\theta)$; en déduire que Ψ est surjective.

I.C.4) Soit H l'ensemble des matrices $M(A, \vec{b})$ de G telles que $\Psi(M(A, \vec{b})) = \Delta(\vec{0}, \vec{e}_1)$.

a) Décrire les éléments de H .

b) Montrer que H est un sous-groupe de G .

c) Montrer que pour tout g de G , et tout h de H , on a $\Psi(gh) = \Psi(g)$.

Pour tout entier n, on note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^n f(x, y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ on appelle *transformée de Radon* de f la fonction $\hat{f}$ définie, là où c'est possible, par

$$\boxed{\hat{f}(q, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)dt}$$

II Fonctions radicales

II.A - Étude d'un exemple

On considère, dans cette sous-partie seulement, la fonction f définie par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

II.A.1) Établir que f est dans $\mathcal{B}_1$.

II.A.2) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ avec $\hat{f}(q, \theta) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1 + q^2}}$.

II.A.3) On pose $R(q) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(q, \theta)\, d\theta$. Démontrer que $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $f(0, 0) = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{R'(q)}{q}\, dq$ (On pourra, pour calculer cette dernière intégrale, procéder au changement de variable $q = \mathrm{sh}\,(u)$).

II.A.4) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est-elle dans $\mathcal{B}_2$?

II.B - Fonctions radicales : cas général

On suppose dans le reste de cette partie qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

II.B.1) Pour $r \in \mathbb{R}^+$, calculer $\bar{f}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, dt$.

II.B.2) Justifier la convergence, pour tout réel $q \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\, dr$.

II.B.3) Démontrer que la transformée de Radon de f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall q \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(q,\theta) = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\, dr.$$

II.B.4) En déduire que $\forall q \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\, d\theta = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\, dr$.

III Transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{B}_1$

On considère dans cette partie une fonction f appartenant à $\mathcal{B}_1$ et on rappelle que

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)dt$$

III.A Vérifier que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

III.B Justifier que pour tout q et tout θ on a $\hat{f}(-q,\theta+\pi) = \hat{f}(q,\theta)$.

III.C On pose encore $\bar{f}(r) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, dt$.

III.C.1) Démontrer que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.C.2) Démontrer que la fonction $r \mapsto r^2\bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

III.C.3) Montrer que si on suppose de plus que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, alors $r \mapsto r^4\bar{f}'(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Sous ces hypothèses, on peut démontrer en manipulant des intégrales doubles que la formule du II.B.4 reste vraie. Nous admettrons donc dans la suite que

$$\forall q \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\, d\theta = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\, dr.$$

IV Formule d'inversion

On souhaite retrouver la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$. À cet effet on pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_{x,y}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(x\cos\theta + y\sin\theta + q, \theta)\, d\theta$$

L'objectif est de démontrer la formule d'inversion de Radon : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \displaystyle\frac{-1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{R'_{x,y}(q)}{q}\, dq$.

IV.A - Résultats préliminaires

IV.A.1) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ et montrer que sa valeur est $\dfrac{\pi}{2}$.

IV.A.2) Soient ε et r fixés tels que $0 < \varepsilon < r$. Avec le changement de variables $q = r\cos\theta$, établir que

$$\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}$$

IV.B - Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $r \mapsto r^2 h(r)$ est bornée et on pose $H(q) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{th(qt)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

IV.B.1) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

IV.B.2) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $H(q) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{q^2}\right)$

IV.B.3) Démontrer que si on suppose de plus que $r \mapsto r^4 h'(r)$ est bornée, alors la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

IV.C - Vers la formule d'inversion

On considère une fonction f de $\mathcal{B}_1$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

On pose, avec les notations de la partie III : $\forall q \in \mathbb{R}^+$, $F(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)d\theta = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr.$

IV.C.1) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{q}\right)$.

IV.C.2) Démontrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{q^2}\left(\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr\right)dq.$

IV.C.3) On admet que l'on peut intervertir les deux intégrales ci dessus et donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{1}{q^2}\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr\right)dq = \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\int_\varepsilon^{r} \frac{r\bar{f}(r)}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\,dq\right)dr.$$

En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -2\varepsilon\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr.$

IV.D - La formule d'inversion

IV.D.1) On considère une fonction f dans $\mathcal{B}_1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

IV.D.2) Établir la formule d'inversion de Radon pour cette fonction f au point $(x,y) = (0,0)$.

IV.D.3) Les hypothèses faites sur f sont-elles nécessaires pour que la formule d'inversion de Radon soit vérifiée au point $(x,y) = (0,0)$?

IV.D.4) Proposer une démarche pour obtenir la formule d'inversion de Radon en tout couple (x,y) à partir de la formule en $(0,0)$.

V Interprétation : *Fonction invariante sur G*

Le but de cette partie est d'interpréter l'opérateur étudié plus haut en termes de fonctions invariantes sur G

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f^* la fonction $f \circ \Phi$, définie sur G par $f^*(g) = f(\Phi(g))$ où $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$ est la fonction introduite dans la question I.A.5.

V..1) Démontrer que pour tout g dans G et r tel que $\Phi(r) = \vec{0}$ on a $f^*(gr) = f^*(g)$.
On dit alors que f^* est invariante par les rotations du plan, vues comme des éléments de G .

V..2) On suppose à présent que f vérifie les hypothèses permettant de définir sa transformée de Radon et on va démontrer que $\hat{f}$ peut également être vue comme une fonction sur G , sujette à un autre type d'invariance.
Démontrer que si deux droites $\Delta(q_1, \vec{u}_{\theta_1})$ et $\Delta(q_2, \vec{u}_{\theta_2})$ coïncident, alors $\hat{f}(q_1,\theta_1) = \hat{f}(q_2,\theta_2)$.
Ce résultat permet de faire l'abus de notation $\hat{f}(\Delta(q,\vec{u}_\theta)) = \hat{f}(q,\theta))$ sans qu'il en résulte d'ambiguïté.

V..3) On définit à présent $\hat{f}^*$ sur G en composant $\hat{f}$ par Ψ : on pose, pour tout $g \in G$, $\hat{f}^*(g) = \hat{f}(\Psi(g))$.
Démontrer que $\hat{f}^*$ est H-invariante, c'est-à-dire que pour tous $g \in G$ et $h \in H$, $\hat{f}^*(gh) = \hat{f}^*(g)$.