

DS n°8 Plus dur

Concours blanc Février 2020 (durée 2 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Un résultat non justifié, même juste, ne rapporte aucun point.

Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants.

- $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constitué de ses éléments développables en séries entière sur un voisinage de 0.
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constitués de ses éléments polynomiaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \begin{cases} u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) dt \\ v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations

A. Préliminaires

- 1) Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.
- 2) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartient à $\mathcal{E}$ et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.
- 3) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et par v .
- 4) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

- 5) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Étude de la continuité de u et de v

On considère une norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|$$

- 6) Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même.
On admet que l'application v n'est pas continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même, mais que v est continue de $(\mathcal{E}; N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
Donc les normes M et N ne sont pas équivalentes.
- 9) Si $f \in \mathcal{E}$ et si $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = P(0)$ et $|f'(x) - P'(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C. Étude de l'inversibilité de u et v

- 10) Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.
- 11) Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v .
- 12) Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

D. Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

- 15) Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u . Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants?
- 16) Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u . L'est-il par v ?
On considère une valeur propre λ de u , de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.
- 17) vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda| |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

- 18) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et de v .