# DS n°9

Mercredi 26 février 2020 (durée 4 heures)

**Toute calculatrice interdite**

*Rappel : Un résultat non justifié, même juste, ne rapporte aucun point.*

## Exercice 1

Dans cet exercice, $n$ est un entier tel que $n \geq 2$.

**Q.1** Question préliminaire
Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{\lambda}{n}$.
Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \right) = 1$$

et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n > 50$, $p \leq 0,01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

**Q.2** Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP $n$ candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des $n$ candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable $X_n$ et donner son espérance.

**Q.3** Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité qu'au moins deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre $0,55$ comme valeur approchée de $e^{-0,6}$. (on peut remarquer que $219 = 3 \times 73$ et $365 = ...$)

## Exercice 2

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

**Q.4** Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

**Q.5** Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

## Exercice 3

Des bits d'information, c'est à dire des 0 et des 1 sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie c'est à dire qu'un 1 (respectivement un 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.
On note $b$ le bit envoyé et $b'$ le bit en sortie ( $b \in \{0, 1\}$ et $b' \in \{0, 1\}$ ).
Après observation on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste :
• Le bit envoyé définit une variable aléatoire $b$ : on note $\alpha$ la probabilité qu'un 1 soit envoyé, (c'est à dire $\alpha = P(b = 1)$) et donc $1 - \alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé, avec $0 < \alpha < 1$
• La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste :

− On désigne par $p$ la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission (c'est à dire $p = P(b' = 1|b = 1)$ ) et donc $1 - p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie, avec $0 < p < 1$.
− On désigne par $q$ la probabilité qu'un 0 en entre ne soit pas altérée pendant la transmission, et donc $1 - q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie, avec $0 < q < 1$.

**Q6.** On a écrit ci-dessus $p = P(b' = 1|b = 1)$. exprimer de la même manière $1-p$, $q$ et $1-q$ en terme de probabilités conditionnelles.

**Q7.** Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?

**Q8.** On reçoit le bit 1. Quelle est la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer $n$ fois le même bit $b$. On note $b'_1, ..., b'_n$ les $n$ bits obtenus en sortie et on note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie. On remarque que les valeurs possiblement prises par $X$ sont $0, 1, ..., n$.

**Q9.** Soit $k$ un entier entre 0 et $n$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres $p, q, \alpha$.

**Q10.** En déduire l'espérance de $X$ en fonction des paramètres $p, q, \alpha$.

**Q11.** Soit $k$ un entier entre 0 et $n$. exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut $k$.

Le canal est désormais symétrique, c'est à dire que chaque bit, que ce soit un 0 ou un 1, peut être altéré avec la même probabilité $1-p$. On suppose que $\frac{1}{2} < p < 1$.

**Q12.** (a) Déterminer en fonction des paramètres $p$ et $\alpha$, l'ensemble des valeurs $k$ prises par $X$ pour lesquelles il est plus probable, au sens strict, qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0.

(b) Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ ?

**Q13.** On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est à dire que le bit en entrée ne soit pas le plus probable en sortie.

(a) Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$ pour des entiers $k$ entre 0 et $n$.

(b) Donner une expression de $f(n)$ en fonction de $n$ et de $p$.

# PROBLÈME

### Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions $L_a$ est une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

### Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a$ : $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

**Q14.** Soit $x \in ]-1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour $n$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in ]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série $L_a$ peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série $L_a$ converge en au moins un point $x_0$ n'appartenant pas à l'intervalle $]-1, 1[$.

**Q15.** Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$.

**Q16.** On pose, pour tout $x \in ]-1, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$. Justifier que la fonction $f$ est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

**Q17.** Expression sous forme de série entière. On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p} \right) \text{ où } I_n = \{(k, p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in ]-1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in ]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.

($d|n$ signifiant $d$ divise $n$ avec $d \in \mathbb{N}^*$).

**Partie II - Exemples : RESERVE AUX SUJETS PLUS DURS**

**Q18.** Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note $d_n$ le nombre de diviseurs positifs de $n$. Exprimer pour $x \in ]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

**Q19.** Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec $n$ et inférieurs à $n$.

Justifier que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in ]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

**Q20.** En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

**Q21.** Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in ]-1,1[$,
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q16.**

**Q22.** Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in ]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.