

à rendre mercredi 9 Octobre 2019

PROBLÈME : UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNONNotations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si u est un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E , on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u^n \circ u$.

On note $K_n[X]$ la K -algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n , $\mathcal{M}_n(K)$ la K -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$; les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{i,j})$.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, on note tA la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(A - XI_n)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\text{la matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II. III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ de $K_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

- Montrer que C_P est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$ et déterminer χ_{C_P}
- On note tC_P la transposée de la matrice C_P .
 - Soit λ élément de $\text{Sp}({}^tC_P)$, déterminer le sous-espace propre de tC_P associé à λ .
 - On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que tC_P est diagonalisable

$$\text{et en déduire que le déterminant de Vandermonde } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ est non nul.}$$

3. Exemples :

- Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2019} = A^{2018} + A^{2017} + 2016I_n.$$
- Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1 \leq i \leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\} \text{ ensemble appelé disque fermé de centre } 0 \text{ et de rayon } r_i.$$

$$\text{Pour } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \text{ on note } \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$$6. \text{ Soit } \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ un vecteur propre associé à } \lambda.$$

Montrer que pour tout entier $1 \leq i \leq n$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$.

7. Démontrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_k$.

8. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

9. *Application* : Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E , on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u .

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \dots - a_0u(n).$$

10. Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F .

11. Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

12. Pour tout entier $0 \leq i \leq p-1$ on définit les éléments e_i de F par :

$$e_i(i) = 1 \text{ et, lorsque } 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } j \neq i, e_i(j) = 0.$$

(a) Déterminer $e_i(p)$ pour $0 \leq i \leq p-1$.

(b) Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est une base de F .

(c) Soit u un élément de F , établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

13. Si u est un élément de E , on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f .

14. Si g est l'endomorphisme de F induit par f , montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est tC_P .

15. On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$.

(a) Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g .

(b) En déduire que, si u est élément de F , il existe des constantes complexes $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \dots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n.$$

16. *Exemple* : (On revient à la notation usuelle u_n)

Soit a, b et c trois réels distincts.

Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc u_n.$$

IV. Facultatif : une démonstration de Cayley-Hamilton

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u est un endomorphisme de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Le but étant de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton, nous ne pourrions bien évidemment pas l'utiliser dans les questions suivantes.

On notera M_u le **polynôme minimal** de u .

17. Pour $x \in E$, on définit $L_x = \{P \in \mathbb{K}[X], [P(u)](x) = 0\}$.

Montrer que $\forall x \in E, \exists ! P_x \in \mathbb{K}[X]$, unitaire non nul de degré minimum appartenant à L_x .

Montrer que $\deg P_x \leq n$.

18. Montrer que M_u est le plus petit commun multiple des polynômes $P_{e_1}, P_{e_2}, \dots, P_{e_n}$.

19. Soit n_1 le degré de P_{e_1} .

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n_1-1}(e_1))$ est libre, et que $n_1 = \dim \text{Vect}(u^k(e_1); k \in \mathbb{N})$.

20. Montrer que $P_{e_1} \mid \chi_u$ où χ_u est le polynôme caractéristique de u .

En déduire que $M_u \mid \chi_u$, et que $\chi_u \in \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$

Comment s'énonce le résultat ainsi (re)trouvé ?