# DM n°10

A rendre mercredi 4 mars 2020

## PROBLÈME

Dans tout le problème, $a$ et $b$ désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement $a$ boules blanches et $b$ boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, $\ll$ au hasard $\gg$ et $\ll$ avec remise $\gg$ d'une boule en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais est remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

### PARTIE I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable $Y$.
2. Pour tout entier $k$ compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.
3. Vérifier que $P(Y = b+1) = \dfrac{b!}{N^b}$,

   et que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $b$, la formule suivante est vraie :
   $$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!\,N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!\,N^k}.$$
4. Soient $M$ un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_M$ une famille de réels. Établir que :
   $$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - M a_M.$$
5. En déduire que $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!\,N^k}$.

### PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geq 1$, $q_n$ la probabilité de l'événement, note $N_n$ : $\ll$ la $n$-ième boule tirée est noire$\gg$ ,
- pour tout entier $n \geq 0$, $X_n$ le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des $n$ premiers tirages. Par convention $X_0 = 0$.
- pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : $\ll$ au cours des $n$ premiers tirages, on a obtenu exactement $k$ boules noires$\gg$ .

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$ ?
2. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels $n$ et $k$ non nuls :
   $$(\mathcal{A}) : N.p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.$$
3. <u>Calcul de l'espérance de $X_n$ :</u>

(a) À l'aide de la formule ($\mathcal{A}$) obtenue dans la question **II.2.**, démontrer la formule pour $n \geq 1$ :
$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)]\, p_{n-1,k}$$
puis justifier que : $E(X_n) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \dfrac{b}{N}$.

(b) En utilisant la dernière formule établie à la question **II.3.a**, prouver que, pour tout entier naturel $n$, on a :
$$E(X_n) = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

4. Calcul de $q_n$ :

(a) Établir la formule suivante valable pour tout entier naturel $n$ : $N.q_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (b-k) p_{n,k}$.

(b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer alors $q_{n+1}$ en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de $q_{n+1}$ en fonction de $n$, $b$, $N$.

5. Calcul de la variance de $X_n$ : On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
$$u_n = E\left(X_n(X_n - 1)\right).$$

(a) À l'aide la formule ($\mathcal{A}$) obtenue dans la question **II.2.** montrer que l'on a :
$$N.u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k]\, p_{n-1,k}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

(c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel $n$ :
$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

(d) Donner alors la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.